Traitement des signaux déterministes - Equations de convolution

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Problème de Cauchy

On veut résoudre $f'(t) + \alpha f(t) = 0$ avec $f(0) = f_0$.
En prenant la vision des distributions, on a : $F(t) = H(t)f(t)$
Et la dérivée de la distribution F est $\boxed{F'(t) = H(t)f'(t) + \delta f(0)}$
Alors

$$\begin{aligned} F'(t) + \alpha F(t) &= H(t)f'(t) + \delta f(0) + \alpha H(t)f(t) = 0 \\ &= H(t)(f'(t) + \alpha f(t)) + \delta f(0) = 0 \\ &= \delta f(0) = 0 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{f'(t) + \alpha f(t) = 0 \iff (\delta' + \alpha\delta) * F = f_0\delta}$$

Equation de convolution

Définition

$$\boxed{A * X = B}$$

où A et B sont des distributions connues et X est une distribution inconnue.

Inverse de convolution

L'inverse de convolution de A est définie telle que :

$$\boxed{A * A^{-1} = \delta}$$

Distribution de Green

La distribution de Green de A est définie telle que :

$$\boxed{A * G = \delta}$$

Algèbre de Convolution

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ est une algèbre de convolution si } : \begin{cases} \mathcal{A} \text{ est un e.v. de distributions} \\ \mathcal{A} \text{ est stable par convolution : } \forall (T_1, T_2) \in \mathcal{A}^2, T_1 * T_2 \in \mathcal{A} \\ \text{La convolution est associative dans } \mathcal{A} \end{cases}}$$

Le neutre de la convolution est la distribution δ.
Exemple d'algèbre de convolution : $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.
Nb : Si $A \in \mathcal{A}$ et $G \in \mathcal{A}$, alors $G = A^{-1}$.
Utilisation : $A * X = B$ donc $X \in \mathcal{A}$ et $X = A^{-1} * B$.

Solution de l'équation de convolution et distribution de Green

$$\boxed{A * X = B \iff X = X_0 + G * B}$$

Equation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\boxed{D_n X(x) = Y(x)}$$

où D_n est l'opérateur différentiel d'ordre n et Y est une distribution connue.

$$\boxed{D_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}}$$

Où $a_n = 1$.

On veut résoudre maintenant l'équation $d_n * X(x) = Y(x)$.

$$\boxed{d_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \delta^{(p)}}$$

Alors il existe des p_n tels que :

$$\boxed{d_n^{-1} = \mathop{\ast}_{p=0}^{n} H(x) e^{p_n x}}$$

Et alors $\boxed{X = d_n^{-1} * Y}$.

Equation intégrale

On veut résoudre l'équation $f(x) + \displaystyle\int_0^x f(t) k(x-t) \mathrm{d}t = g(x)$

où k et g sont des fonctions connues.

On pose alors $F = H.f, \qquad G = H.g, \qquad K = H.k.$

Alors l'équation devient $\boxed{F + K * F = G}$.

Et alors $(\delta + K) * F = G$ et finalement $\boxed{F = (\delta + K)^{-1} * G}$.

Conclusion

Pour un système linéaire, invariant et continu, si S la sortie et H la réponse impulsionnelle du système, on peut connaître la réponse à n'importe quelle entrée E :

$$\boxed{S = H * E}$$